30. 全微分方程式ノ積分ニ就テ (I)

占部　実（広島文理大）

§1. 序

Forsyth, Theory of Differential Equations, I, p. 31—32 ニ依レバ,[1]

全微分方程式

$$\Omega \equiv X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 \qquad (1.1)$$

ヲ積分スル du Bois-Reymond ノ方法ハ幾何学的ニ述ベレバ次ノ通リデアル。

$\Omega = 0$ ガ integrable デアル時,[2] 其ノ integral surface S ヲ考ヘ、S 上ノ一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ヲ通リ任意ノ曲面

$\chi(x,y,z)=a$ $(a=const)$ ヲ考ヘ、是トSトノ交線C上ニ他ニ任意ニ一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$ヲ取ル。$P_1(x_1,y_1,z_1)$ヲ通ル他ノ任意ノ曲面$\chi'(x,y,z)=b$ヲ考ヘ、是トSトノ交線C上ニ又任意ニ他ノ一点$P_2(x_2,y_2,z_2)$ヲ取ル。然ルトキCハ次式ヲ積分シテ得ラレル。

$$\Omega=0\ ,\quad d\chi=0$$

此積分ハ変数ガ2個ノ場合ニreduceサレル。此積分ヲ$f(x,y,z)=const.$トスレバ点P_0、P_1ノ座標ノ間ノ次ノ関係式ガ成立スル。

$$\left.\begin{aligned}\chi(x_0,y_0,z_0)&=a=\chi(x_1,y_1,z_1)\\ f(x_0,y_0,z_0,a)&=f(x_1,y_1,z_1,a)\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

同様ニC'ノ方程式ヲ求メ、P_1、P_2ノ座標ノ間ニ次ノ関係式ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned}\chi'(x_1,y_1,z_1)&=b=\chi'(x_2,y_2,z_2)\\ f'(x_1,y_1,z_1,b)&=f'(x_2,y_2,z_2,b)\end{aligned}\right\}\qquad(1.3)$$

---

(1) du Bois-Reymond ノ原論文ハ du Bois-Reymond、Crelle、t. 19 (1869), p. 299-313. 但シ筆者ハ戦災ノタメ原論文ヲ参照スルヲ得ナカッタタメ、同論文ヲ紹介セルForsythノ上記ノ著書ニ依ッタ。

(2) 全微分方程式ガ一ツノ integral equation ニ依テ満足サレルトキ、其全微分方程式ハ integrable デアルトイフ。

(1.2)、(1.3) ヨリ x_1、y_1、z_1、a、bヲ消去スレバ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\Phi(x_0,y_0,z_0\,;\,x_2,y_2,z_2)=0\qquad(1.4)$$

Reymondハ此処デ$\Omega=0$ガintegrableデアルナラバ(1.4)ハ次ノ形ニナルト限定ヲシテ居ル。

$$\phi(x_0,y_0,z_0)=\phi(x_2,y_2,z_2)\qquad(1.5)$$

然ルトキ(1.5)ハ点$P_1(x_1,y_1,z_1)$ガ曲線C上ヲ動クトキ、点$P_2(x_2,y_2,z_2)$ノ軌跡ヲアタヘルガ故ニ、此ノ$\phi(x,y,z)=const.$ガ求ムル$\Omega=0$ノintegralヲアタヘル。以上ガReymondノ

方法ノ概要デアル。

本論文デハ先ヅ曲面 $\chi=a$，$\chi'=b$ ノ満足スベキ條件ヲ求メ (1.2)(1.3) ニ於テ採用スベキ函數 f, f' ノ性質ヲ規定シ．次デ (1.2), (1.3) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式 (1.4) ハ $\Omega=0$ ガ integrable ナル時ハ確カニ (1.5) ノ形トナルコトヲ示ス。次ニ逆ニ二曲面 $\chi=a$, $\chi'=b$ ヲ一定條件ヲ満足スル如ク取リ $\Omega=0$ $d\chi=0$ 及ビ $\Omega=0$, $d\chi'=0$ ノ integral f, f' ヲ適當ニ選デ (1.2)、(1.3) ヲ作リ．是等ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去スル時、得ラレタ消去式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナルナラバ $\Omega=0$ ハ integrable トナリ．其時得ラレタ $\phi(x)=\mathrm{const}$. ガ $\Omega=0$ ノ integral トナルコトヲ証明スル。

カクテ結論トシテ次ノ結果ガ得ラレタ。即チ

$\Omega=0$ ガ integrable ナルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ (1.2)、(1.3) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナルコトデアル，ソシテ其時得ラレタ (1.5) ノ $\phi(x)=\mathrm{const}$. ガ求ムル $\Omega=0$ ノ integral デアル。

尚 $\Omega=0$ ガ integrable ナル時ハ．上ノ如クシテ求メラレタ integral $\phi(x)=\mathrm{const}$. ハ途中デ補助ニ用ヒラレタ χ, χ' ノ形ニハ無關係デアルコトモ示ス[1]。

---

(1) Reymond ノ方法ニ於テ得ラレタ $\phi(x)=\mathrm{const}$ ガ χ, χ' ノ形ニ關係アリヤ否ヤノ問題モ解決サレテヰナイト Forsyth ハ述ベテヰル。Forsyth. Theory of Diff. Eqs. I. p. 32.

次ニ此立場ヨリ Reymond ノ方法ヲ一般ノ n 個ノ變數ノ場合ニ擴張シ、Natani ノ方法．Mayer ノ方法ハ、Reymond ノ方法ニ於テ上ノ χ, χ' トシテ特別ノモノヲ選ダ場合ニ過ギヌコトヲ示シ[1]、從來統一サレテヰナカッタ是等ノ方法ヲ Reymond ノ立場カラ新シク統一シタ。又積分條件ガ explicit ニアラハレテヰナイ Natani

ノ方法、Mayer ノ方法等ニ於テ其ガ何処ニ如何ナル形デアラハレルカモ Reymond ノ立場カラ明ラカニスルコトヲ得タ。最後ニ Reymond ノ方法ヲ最モ一般ナル場合、即チ任意数ノ変数ヲ有スル completely integrable ナ全微分方程式ノ系ニ迄拡張スル。此場合ニ於テモ Reymond ノ方法ト Natani ノ方法、Mayer ノ方法ニ対スル関係ハ全ク同様デアル。但シ其関係ノ証明ハ一ツノ全微分方程式ノ場合ト全ク同様デアルカラ省略シタ。

§2. χ, χ' ノ満足スベキ條件.

(1.1) ガ integrable デアルトシテ、其任意ノ一ツノ integral ヲ $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ トスル。然ルトキ $\varphi(x, y, z)$ ニ対スル integrating factor ヲ入トスレバ、次ノ関係式ヲ得ル。

$$\lambda X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \lambda Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.1}$$

曲面 $\chi = a$ ヲ取ルトキ、若シモ次式ガ成立シテヰルナラバ

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} : \frac{\partial \chi}{\partial y} : \frac{\partial \chi}{\partial z} = X : Y : Z \tag{2.2}$$

(2.1) ト比較シテ $\varphi = F(\chi)$ トナリ integral surface $\varphi(x) = \text{const.}$ ト $\chi = \text{const.}$ トハ一致スル。依テ此場合ニハ integral surface S ト $\chi = a$ トノ交リハ曲線デナクナル。然シ此場合ニハ (2.2) ヨリ明ラカナル如ク $\chi = \text{const.}$ ガ直チニ求ムル $\Omega = 0$ ノ integral トナル。同様ニ χ' ニ就テ

$$\frac{\partial \chi'}{\partial x} : \frac{\partial \chi'}{\partial y} : \frac{\partial \chi'}{\partial z} = X : Y : Z \tag{2.3}$$

ガ成立スルトキハ $\chi' = \text{const.}$ ガ直チニ $\Omega = 0$ ノ integral トナル。依テ我々ハ以下ニ於テハ (2.2) 及ビ (2.3) ガ成立スル場合ヲ除外シテ論ズル。

---

(1) Reymond ノ方法ト Euler、Bertrand、Natani ノ方法トノ関係ハ Reymond, Math. Ann. Bd. 12 (1877).

S. 123−131 ニアル。尚 Reymond ノ方法ノ其他ノ批判ハ Weiler, Schlöm. Zeitschr. Bd. 20 (1875), S. 80−83. ニアル。但シ筆者ハ戦災ノタメ Weiler ノ論文ハ参照スルコトガ出来ナカッタ。

次ギニ　次式デ定義サレル行列式 Δ ガ 0 ナル場合ニツキ考察スル。

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\chi'}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi'}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi'}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

$\Delta=0$ ナラバ $\Omega=0$ ノ integral surface $\varphi=\text{const.}$ 上ノ同一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ヲ通ル曲線 C, C' ハ一致スル。何トナレバ C ノ line element dx, dy, dz ハ次式デ決定サレ、

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv X dx + Y dy + Z dz = 0 \\ d\chi &\equiv \frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy + \frac{\partial\chi}{\partial z}\partial z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

C' ノ line element $\delta x, \delta y, \delta z$ ハ次式デ決定サレル。

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \\ d\chi' &\equiv \frac{\partial\chi'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\chi'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\chi'}{\partial z}\delta z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

然ルニ (2.2)、(2.3) ガ成立シナイカラ $dx : dy : dz$ 及ビ $\delta x : \delta y : \delta z$ ハ夫々 (2.5) 及ビ (2.6) ヨリ unique ニ定マリ次ノ如クナル。

$$\left.\begin{aligned} dx : dy : dz &= \begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z & X \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial z} & \dfrac{\partial\chi}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X & Y \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi}{\partial y} \end{vmatrix} \\ \delta x : \delta y : \delta z &= \begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial\chi'}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi'}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Z & X \\ \dfrac{\partial\chi'}{\partial z} & \dfrac{\partial\chi'}{\partial x} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} X & Y \\ \dfrac{\partial\chi'}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi'}{\partial y} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

サテ$\Delta=0$ニシテ且ツ(2.2)ガ成立シナイカラ次式ヲ満足スルα, βガ存在スル。

$$\frac{\partial\chi'}{\partial x}=\alpha X+\beta\frac{\partial\chi}{\partial x},\quad \frac{\partial\chi'}{\partial y}=\alpha Y+\beta\frac{\partial\chi}{\partial y},\quad \frac{\partial\chi'}{\partial z}=\alpha Z+\beta\frac{\partial\chi}{\partial z} \quad (2.8)$$

且ツ(2.3)ガ成立シナイカラ$\beta\neq 0$. 是ヲ(2.7)ノ$\delta x:\delta y:\delta z$ノ右辺ニ代入スレバ$dx:dy:dz$ト比較シテ

$$dx:dy:dz=\delta x:\delta y:\delta z$$

二曲線C, C'ハ同一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$ヲ通ル故. C, C'ハ一致スル。然ルトキ幾何学的ニ考ヘテ、(1.2). (1.3)ヨリa, b, x_1, y_1, z_1ヲ消去シ得ル式ハ曲面ヲアラハサズシテ. C, C'ノ一致セル一曲線Kヲアラハス。即チ *integral surface* 上ノ曲線ノ方程式ヲ得テ、*integral surface* ノ方程式ハ得ラレナイコトニナル。

サテ(2.5)ノ *integral* ヲ$f=const.$トスルノデアルガ、若シfガχニ独立デナイトスルト$f=const.$ト$\chi=const.$トハ一致シ$f=const.$ $\chi=const.$ハ単ニ曲面$\chi=const.$ヲアラハシ. 曲線Cヲアラハサナクナル。然ルトキ(1.2)ハ点$P_1(x_1, y_1, z_1)$ヲ曲線C上ニ取ツタ事ヲアラハサナクナル, 換言セバ(1.2)ヲ満足スル如キ点$P_1(x_1, y_1, z_1)$ハ曲面$\chi=a$上ノ任意ノ点ヲアラハシ. 必ズシモ曲線C上ノ点デナクナル。是ハ点P_1ヲ曲線C上ニ取ルトイフ仮定ニ反スル。依テfトシテハχニ独立ナモノヲ取ラネバナラヌ。而シテ(2.2)ガ成立シナイカラ(2.5)ハ二ツノ独立解ヲ有シ、一ツハ$\chi=const.$デアルカラχニ独立ナモウ一ツノ *integral* ガ必ズ存在スル。依テ(2.5)ノ *integral* ノ中χニ独立ナモノヲ取リ、是ヲfトスルコトニスル。f'ニツイテモ同様デアルカラ、(2.6) *integral* ノ中χ'ニ独立ナモノヲf'トスル。

カクテ *Reymond* ノ方法ニヨリ$\Omega=c$ノ *integral* ヲ求ムルタメニハ$\Delta\neq 0$ナル如キχ, χ'ヲ選ビ, (2.5). (2.6)ノ *integral* トシテハ夫々χ, χ'ニ独立ナモノヲ取ラネバナラヌコトニナル。依テ(2.2)又ハ(2.3)ガ成立スル場合ヲ除イテ *Reymond* ノ方法ガ

可能ナルタメニハ次ノ條件ガ満足サレテヰルコトガ必要デアル。

[條件Δ]
$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\partial \chi}{\partial x} & \dfrac{\partial \chi}{\partial y} & \dfrac{\partial \chi}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \chi'}{\partial x} & \dfrac{\partial \chi'}{\partial y} & \dfrac{\partial \chi'}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta=0$ ナル時ニ於テモ (2.2) 又ハ (2.3) ガ成立スレバ $\chi=\text{const.}$ 又ハ $\chi'=\text{const.}$ ガ $\Omega=0$ ノ integral トナリ．integral ハ求メラレル。上ニ$\Delta\neq 0$ト云ツタノハ $\Omega=0$ ガ Reymond ノ方法ニ依テ解キ得ルタメノ條件ヲ云ツテヰルノデ、如何ナル他ノ方法ニ依テモ $\Delta=0$ ナル時ハ $\Omega=0$ ヲ解キ得ナイト云ツテヰルノデハナイ。

次節ニ於テ條件ΔハReymond ノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デモアルコトヲ示ス。以下條件Δガ満足サレテヰルトシテ議論ヲ進メル，條件Δガ満足サレテヰル時ハ．(2.2) 及ビ (2.3) ノ成立セザルコトハ明ラカデアル。

§3. 消去式ノ分解

(1.2) ノ $f(x, y, z, a)$ ハ (2.5) ノ integral デアル。而シテ (2.5) ハ $\Delta\neq 0$ ヨリ (2.2) ガ成立シナイカラ互ニ linearly indenendent ナ方程式デ二ツノ独立解ヲ有スル。$\Omega=0$ ガ integrable デアル時．其任意ノ integral ヲ $\varphi(x, y, z)=\text{const.}$ トスレバ (2.1) ガ成立スル，故ニ (2.5)ハ $\varphi=\text{const.}$ $\chi=\text{const.}$ ナル二ツノ integral ヲ有シ．而モ此ノ φ．χ ハ互ニ独立デアル。何トナレバ独立デナケレバ (2.1) ヨリ (2.2)ガ成立シ $\Delta\neq 0$ ニ矛盾スル。然ルトキ (2.5) ノ integral f ハ次ノ形デアラネバナラヌ。

$$f=f(\varphi, \chi)=f(\varphi, a) \tag{3.1}$$

然モ f ハ χ ニ独立ナル如ク選バレテヰルノデアルカラ

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0 \tag{3.2}$$

然ルトキ (1.2)ハ次ノ如ク書キナホサレル。

$$\left.\begin{aligned} \chi(x_0, y_0, z_0) = a = \chi(x_1, y_1, z_1) \\ f(\varphi(x_0, y_0, z_0), a) = f(\varphi(x_1, y_1, z_1), a) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

同様ニ $f' = f'(\varphi, \chi') = f'(\varphi, b)$, $\dfrac{\partial f'}{\partial \varphi} \neq 0$ (3.4)

故ニ (1.3) ハ次ノ如ク書キナホサレル。

$$\left.\begin{aligned} \chi'(x_1, y_1, z_1) = b = \chi'(x_2, y_2, z_2) \\ f'(\varphi(x_1, y_1, z_1), b) = f'(\varphi(x_2, y_2, z_2), b) \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

(3.3), (3.5) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去スルコトハ、次式ヨリ x_1, y_1, z_1 ヲ消去スルコトデアル。

$$\begin{aligned} &\chi(x_1, y_1, z_1) - \chi(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ &f(\varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_0, y_0, z_0)) - f(\varphi(x_0, y_0, z_0), \chi(x_0, y_0, z_0)) = 0 \\ &\chi'(x_1, y_1, z_1) - \chi'(x_2, y_2, z_2) = 0 \\ &f'(\varphi(x_1, y_1, z_1), \chi'(x_2, y_2, z_2)) - f'(\varphi(x_2, y_2, z_2), \chi(x_2, y_2, z_2)) = 0 \end{aligned}$$

扨此左辺ノ式ノ x_1, y_1, z_1 ニ関スル Jacobian matrix J ヲ作レバ、(2.1) 及ビ $\lambda \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$, $\dfrac{\partial f'}{\partial \varphi} \neq 0$ ニ依リ其 rank ハ行列式 Δ ノ rank ト等シクナル。然ルニ今ノ場合 $\Delta \neq 0$ ナル故 $\rho(J) = 3$ トナル。依テ (3.6) ヨリ x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式ハ algebraic equivalence ヲ除イテハ高々一ツトナル。即チ (3.3), (3.5) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式ハ algebraic equivalence ヲ除イテハ高々一ツトナル。

扨 (3.3) ノ後者ヨリ $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \neq 0$ ニ依リ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_1, y_1, z_1)$。同様ニ (3.5) ヨリ $\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x_2, y_2, z_2)$。故ニ次式ヲ得ル。

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2) \tag{3.7}$$

依テ (3.3), (3.4) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去セル式ハ (3.7) ニ algebraically equivalent ニナル。カクテ次ノ結果ヲ得

ル。(1.2)、(1.3) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去セル式 (1.4) ハ是ニ適当ナ代数的変形ヲホドコセバ $\Omega=0$ ノ任意ノ integral ナ $\varphi(x, y, z)$ ヲ用ヒテ必ズ (3.7) ノ形ニ帰着セシメルコトガ出来ル。即チ (1.5) ノ形ニ必ズ帰着セシメラレル。

又上ノコトヨリ條件Δガ成立シテヰルトキハ $\Omega=0$ ノ integral $\varphi(x, y, z)=const.$ ガ常ニ求メラレルガ故ニ、條件ΔハReymondノ方法ガ可能ナルタメノ十分條件デアルコトハ明ラカデアル。

§4. 消去式ガ分解スルタメノ條件

本節ニ於テハ、(2.5)、(2.6) ノ夫々 χ, χ' ニ独立ナ integral f, f' ヲ用ヒテ (1.2). (1.3) ヲ作リ、是等ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得ル式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナル時ハ、$\Omega=0$ ガ integrable トナリ其時得ラレタ $\phi(x, y, z)=const.$ ガ $\Omega=0$ ノ integral トナルコトヲ証明スル。

(1.3) ニ於テ $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1$ トオイテモ (1.3) ハ成立スル。故ニ (1.5) ニ於テ $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1$ トオイテモ (1.5) ハ成立スル，即チ (1.5) ヨリ

$$\phi(x_0, y_0, z_0)=\phi(x_1, y_1, z_1)=\phi(x_2, y_2, z_2) \qquad (4.1)$$

而シテ点 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) ハ夫々 (2.5)、(2.6) ノアラハス曲線上ノ任意ノ点デアルカラ (4.1) ヨリ $\phi(x, y, z)$ ハ (2.5) (2.6) ノアラハス曲線上ニ於テ constant トナル。即チ $\phi(x, y, z)$ ハ (2.5) ヲ満足スル dx, dy, dz ニ対シテ

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

$\Delta \neq 0$ ヨリ (2.2) ガ成立シナイカラ次式ヲ満足スル如キ p, τ ガ存在スル。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=pX+\tau\frac{\partial\chi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=pY+\tau\frac{\partial\chi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=pZ+\tau\frac{\partial\chi}{\partial z} \tag{4.2}$$

同様ニ $\phi(x,y,z)$ ガ (2.6) ノアラハス曲線上ニ於テ一定デアルコトカラ次式ヲ満足スル如キ p', τ' ガ存在スル。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=p'X+\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=p'Y+\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=p'Z+\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial z} \tag{4.3}$$

(4.2), (4.3) ヲ比較シテ

$$(p-p')X+\tau\frac{\partial\chi}{\partial x}-\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial x}=0$$

$$(p-p')Y+\tau\frac{\partial\chi}{\partial y}-\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial y}=0$$

$$(p-p')Z+\tau\frac{\partial\chi}{\partial z}-\tau'\frac{\partial\chi'}{\partial z}=0$$

$\Delta \neq 0$ ヨリ $p=p'$, $\tau=\tau'=0$　故ニ (4.2),(4.3) ヨリ

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=pX,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=pY,\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=pZ.$$

i.e. $\Omega=0$ ハ *integrable* トナリ、$\phi(x,y,z)=const.$ ガソノ *integral* トナル。

カクテ今マデノ所論ヲ綜合シテ次ノ結果ガ得ラレル。即チ

Reymond ノ方法ニヨッテ $\Omega=0$ ヲ解クコトガ可能デアルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ、(2.2) 若ハ (2.3) ガ成立スル場合ヲ除外スレバ、χ, χ' ガ $\Delta\neq 0$ ヲ満足スルコトデアル。χ, χ' ガ $\Delta\neq 0$ ナル如クエラバレタ時ハ、(2.5), (2.6) ノ *integral* f, f' ヲ夫々 χ, χ' ニ独立ナル如ク取ル時、$\Omega=0$ ガ *integrable* ナルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナ條件ハ (1.2), (1.3) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去セル式 (1.4) ガ (1.5) ノ形トナルコトデアル。ソレデ此時得ラレタ $\phi(x,y,z)=const.$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。

カクテ *integrable* ナ方程式 $\Omega=0$ ノ *integral* ヲ求ムルニハ (1.4) ヲ (1.5) ノ形ニ変形シ、得ラレタ $\phi(x,y,z)$ ヨリ $\phi(x,$

$y, z) = const.$ ヲ作レバ是ガ求ムル $\Omega=0$ ノ integral ヲアタヘル。

§5. $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ノ integral ニ及ボス影響

本節ニ於テハ $\Omega=0$ ノ integral ヲ求ムルタメ途中デ補助ニ用ヒタ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ハ上述ノ方法デ求メラレタ $\Omega=0$ ノ integral ニハ何等本質的影響ヲ与ヘナイコトヲ説明スル。

(1.2).(1.3) ハ $\Omega=0$ ガ integruble ナル時ハ (3.3),(3.5) ノ形トナル，扨 $\varphi(x, y, z)$ ハ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ニ全ク無関係ニ任意ニ選ダ $\Omega=0$ ノ integral デアル。依テ (3.3)，(3.5) ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シテ得タ式 (3.7) ニ於テハ是ガ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ニ無関係ナルコトハ余リニモ自明デアル，然シナガラ $\Omega=0$ ガアタヘラレ，其 integral ヲ求メントスル時ハ (3.3).(3.5) ノ $f=f'(\varphi, a)$，$f'=f'(\varphi, b)$ ノ形ハ分ラナイ。唯分ルノハ (1.2)，(1.3) ノ形デアル。依テ此時是等ヨリ a, b, x_1, y_1, z_1 ヲ消去シタ結果ノ式ニ於テハ途中デ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ヲ用ヒテヰルノデアルカラ其等ノ影響ガ残ルノガ一般デアル。然シソレハ §3 デ論ジタ如ク $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ニ無関係ナ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2)$ = algebraically equivalent ニナルノデアルカラ、消去式ハ algebraic equivalence ヲ除イテハ、$\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ニ無関係デアリ．従テ其等ニ適当ナ代数的変形ヲホドコスコトニヨリ $\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_2, y_2, z_2)$ ニ帰着セシメ、$\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ノ影響ヲ全ク取除クコトガ出来ル。コノ意味ニ於テ Reymond ノ方法ニヨッテ求メラレタ integral $\Phi(x, y, z) = const.$ ハ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ニ無関係デアル。

カクテ $\Omega=0$ ヲ積分スルタメニ取ルベキ $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ ハ $\Delta \neq 0$ ヲ満足シテヰル限リ全ク任意デアル。依テ実際ニ方程式ヲ解ク場合ニハ $\Delta \neq 0$ ナル如キ最モ簡単ナル函数ヲエラビ．其ニ依テ $\Omega=0$ ノ積分ヲ求メレバヨイコトニナル。

以　上